

模块五 零点与不等式

第1节 函数零点小题策略：不含参 (★★☆)

内容提要

不含参的函数零点小题一般有两种处理方法：

1. 令 $f(x)=0$ ，解方程，得出零点个数.
2. 若方程 $f(x)=0$ 不好解，可将其等价变形成 $g(x)=h(x)$ ，则 $y=g(x)$ 和 $y=h(x)$ 图象的交点个数，即为 $f(x)$ 的零点个数. 等价变形成什么样子，应该以便于作图分析为考虑方向.

典型例题

【例1】函数 $f(x)=2\ln x$ 的图象与 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图象的交点个数为 ()

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

解析：直接画图看交点，因为 $g(x)$ 的对称轴是 $x=2$ ，所以画图时注意这个关键位置，

如图，因为 $f(2)=2\ln 2 > g(2)=1$ ，所以两图象有 2 个交点.

答案：B

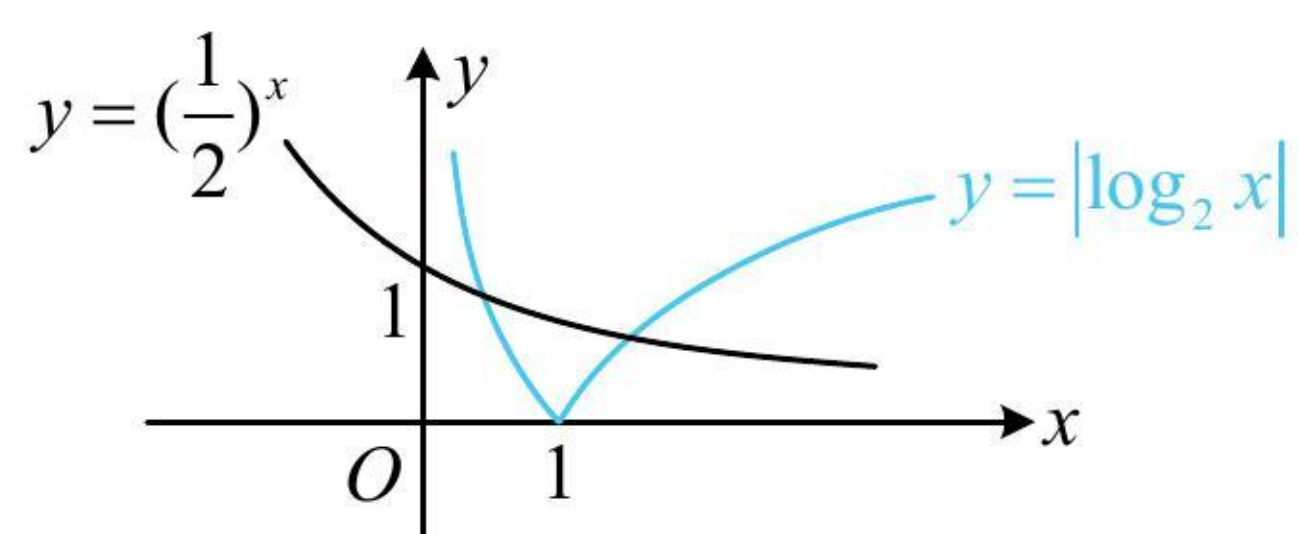


【例2】函数 $f(x)=2^x \cdot |\log_2 x| - 1$ 的零点个数为_____.

解析：直接画 $f(x)$ 的图象不方便，所以先将 $f(x)=0$ 等价变形，再作图看交点，

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2^x \cdot |\log_2 x| - 1 = 0 \Leftrightarrow |\log_2 x| = (\frac{1}{2})^x$ ，如图，两图象有 2 个交点 $\Rightarrow f(x)$ 有 2 个零点.

答案：2



【反思】当直接求解 $f(x)$ 的零点不方便时，可考虑将方程 $f(x)=0$ 等价变形成 $g(x)=h(x)$ 的形式，画 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的图象看交点个数，变形应注意“等价”和“作图方便”两点.

【变式】函数 $f(x) = \begin{cases} 4x+1, & x \leq 0 \\ \ln x - x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$ 的零点个数为_____.

解析：分段函数研究零点个数，可分段来看，第一段比较简单，直接解方程 $f(x)=0$ ，

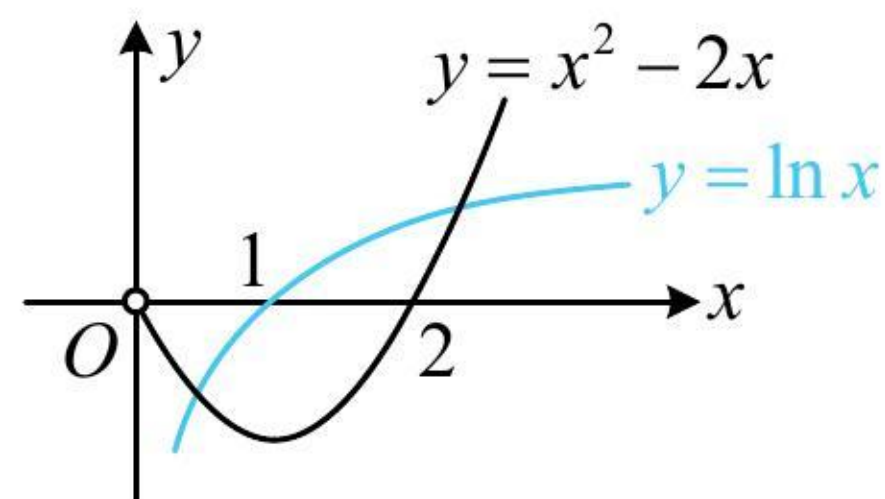
当 $x \leq 0$ 时， $f(x)=4x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{4} \Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 有 1 个零点；

第二段的零点解不出来，所以等价变形，再画图看交点，

当 $x > 0$ 时， $f(x)=\ln x - x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \ln x = x^2 - 2x$ ，作出 $y = \ln x$ 和 $y = x^2 - 2x (x > 0)$ 的图象如图，

由图可知两图象有 2 个交点，所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 2 个零点；故 $f(x)$ 共有 3 个零点。

答案：3



【反思】分段函数的零点可分段研究，在每一段上，若零点能求出，则直接求，否则等价变形看交点。

【例 3】定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 周期为 2，当 $-1 \leq x < 1$ 时， $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x^2, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ ，设 $g(x) = 3 - \log_2 x$ ，

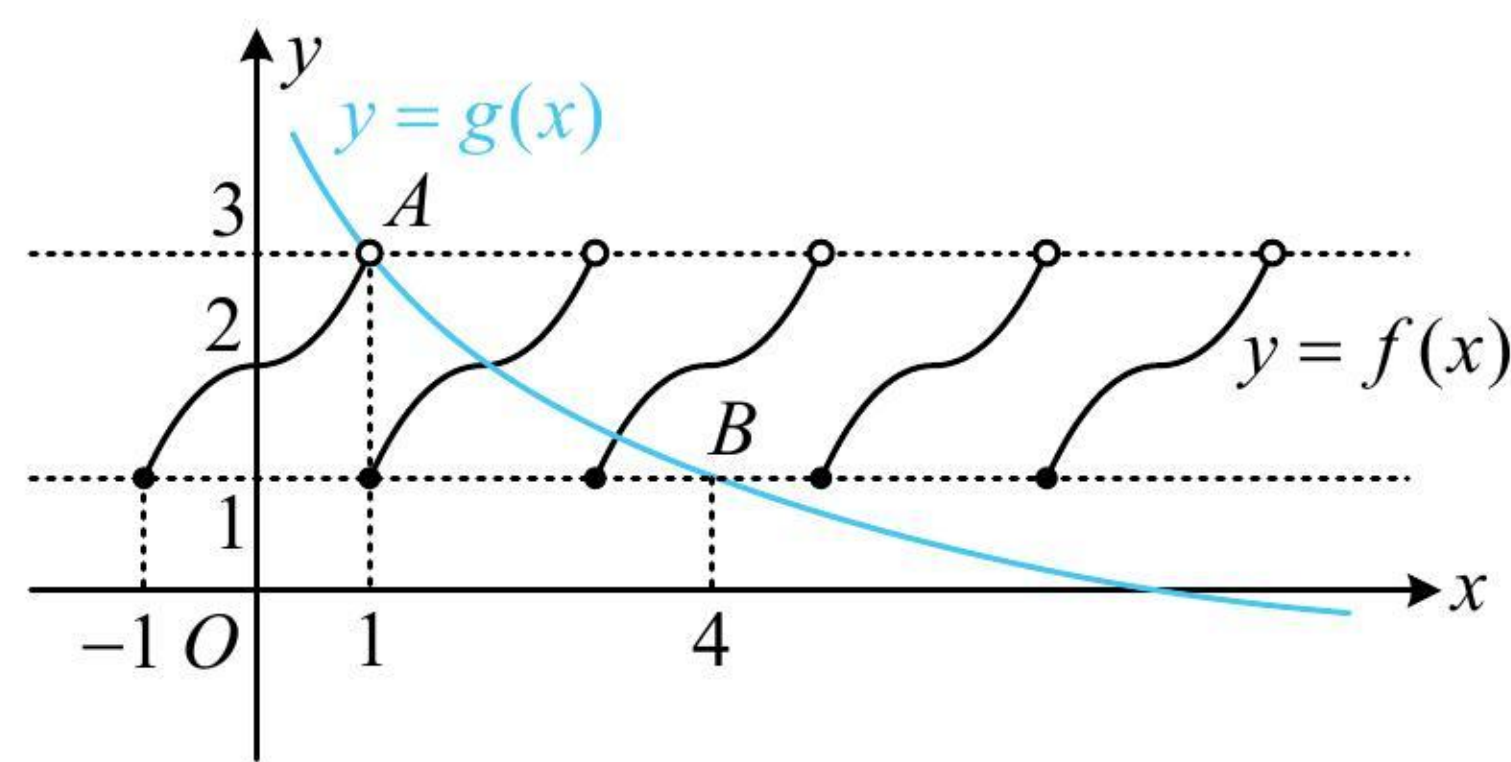
则函数 $y = f(x) - g(x)$ 的零点个数为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解析： $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ，下面作图看交点，由于 $f(x)$ 只在直线 $y=1$ 和 $y=3$ 之间部分有图象，所以作图时需注意 $g(x)$ 的图象与该两直线的交点 A, B 的位置，

令 $g(x)=3$ 可得 $3 - \log_2 x = 3$ ，所以 $x=1$ ，故 $A(1, 3)$ ；令 $g(x)=1$ 可得 $3 - \log_2 x = 1$ ，所以 $x=4$ ，故 $B(4, 1)$ ，所以 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的大致图象如图，由图可知它们有 2 个交点，故选 B。

答案：B



【反思】务必注意空心点和实心点，空心点处必定不是交点。

【变式】函数 $f(x) = 1 - (x - \pi)\sin x$ 在区间 $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$ 上的所有零点之和为 ()

- (A) 0 (B) 2π (C) 4π (D) 6π

解析：零点无法求出，故等价变形看交点， $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - \pi)\sin x = 1$ ①，

为了便于作图，把 $x - \pi$ 除过去，先考虑其能否为 0，当 $x = \pi$ 时，方程①不成立；

当 $x \neq \pi$ 时，方程①等价于 $\sin x = \frac{1}{x - \pi}$ ，接下来作图看交点，

不难发现 $y = \sin x$ 和 $y = \frac{1}{x-\pi}$ 的图象都关于点 $(\pi, 0)$ 对称，所以它们的交点也关于点 $(\pi, 0)$ 对称，

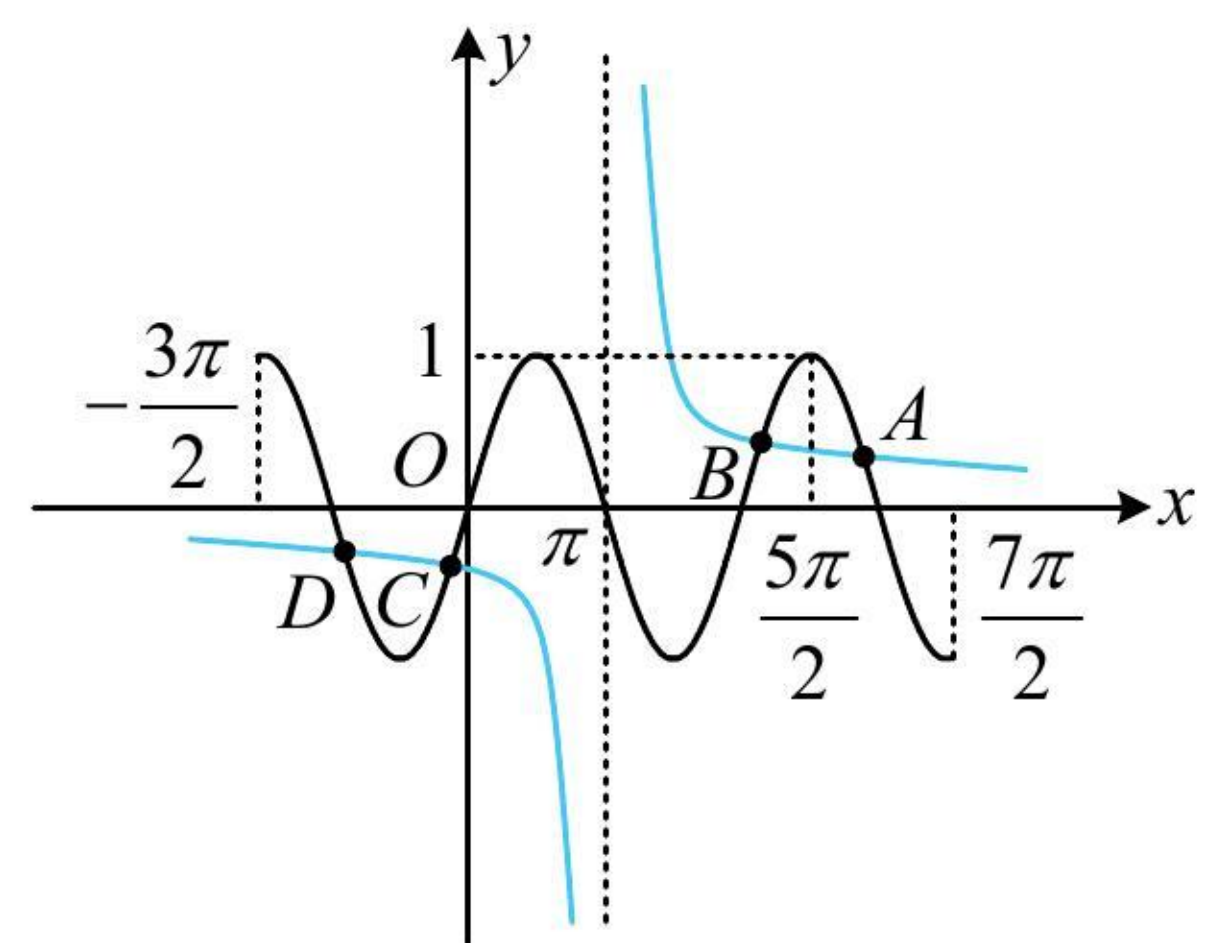
要分析两图象的交点个数，应抓住 $x = \frac{5\pi}{2}$ 这个关键位置，

当 $x = \frac{5\pi}{2}$ 时， $\frac{1}{x-\pi} = \frac{2}{3\pi} < \sin x = 1$ ，所以两图象如图，由图可知它们共有 A, B, C, D 这 4 个交点，

其中 A 与 D, B 与 C 关于 $(\pi, 0)$ 对称，所以 $\frac{x_A + x_D}{2} = \pi, \frac{x_B + x_C}{2} = \pi$ ，

故 $x_A + x_B + x_C + x_D = 4\pi$ ，即 $f(x)$ 在 $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$ 上所有零点之和为 4π 。

答案：C



【反思】当题干让求零点之和时，可以考虑利用图象的对称性求解。

《一数·高考数学核心方法》

强化训练

1. (2022·四川模拟·★★) 已知函数 $f(x) = (\frac{1}{2})^x - \cos x$ ，则 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的零点个数为 ()

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

2. (2022·广东深圳期末·★★) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则方程 $f(x) - 3^{|x|} = 0$ 的解的个数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. (2023·天津模拟·★★) 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x+3} - 3, & x \leq 0 \\ 2x^2 - 7x + 4 - \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 的零点个数为_____。

4. (2023·全国甲卷(改)·★★★) 函数 $f(x) = -\sin 2x$ 的图象与直线 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的交点个数为 ()
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. (★★★) 设 $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \geq 0 \\ |x^2 + 2x|, & x < 0 \end{cases}$, 则 $g(x) = f(x) - ex - 1$ 的零点个数为 ()

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

6. (2023·全国模拟·★★★) $f(x) = 5\sin \frac{\pi}{2}x - |x-1|$ 的所有零点之和为_____.

《一数·高考数学核心方法》